

文章编号: 1000-8055(2006) 03-0442-06

# 低耗散TVD格式及叶轮机内低马赫数流动模拟

李雪松, 徐建中

(中国科学院工程热物理研究所, 北京 100080)

**摘要:** 推导了条件化预处理矩阵在守恒变量下的形式, 以及三维任意曲线坐标系下的相应的系统特征值与特征矩阵。根据预处理技术修正了任意曲线坐标下的Harten-TVD格式, 得到低耗散TVD格式, 并讨论了抑制了压力速度失耦的方法。分别使用修正后低耗散格式与未修正的格式, 对高负荷低压涡轮叶栅T106内低速流动: 进口马赫数分别为0.1, 0.01和0.001, 进行数值模拟。计算表明, 未修正格式不能得到有意义的结果, 而修正后的低耗散格式, 即使在极低的马赫数流动下, 也工作良好。同时可以注意到: 对于无粘流动, 三种进口马赫数条件下, 流场内等压线分布几乎是一致的。

**关键词:** 航空、航天推进系统; 预处理; 低耗散; Harten-TVD; 叶轮机; 低马赫数流动

中图分类号: O354

文献标识码: A

## Low Diffusion TVD Schemes and Simulation of Low Mach Number Flow in Turbomachinery

LI Xue-song, XU Jian-zhong

(Institute of Engineering Thermophysics,  
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract:** The preconditioning matrix in conservation variables was derived from the primitive variables of pressure and entropy, and the resultant eigenvalues and eigenvectors of the preconditioned system were deduced in three dimensional curvilinear coordinates. Specially, the feature matrix given in three dimensional curvilinear coordinates was simple and could be inversed in any case. Then, the low diffusion Harten-TVD scheme in the curvilinear coordinates was obtained based on preconditioning, and the method enforcing the pressure/velocity coupling was discussed. Using schemes with and without preconditioning, low-pressure turbine blade T106 at low Mach number flow, i. e. inlet mach numbers were 0.1, 0.01, 0.001 respectively, was simulated. The convergence histories were considered firstly. It could be noticed that the convergence rate increased obviously with preconditioning. The convergent results indicate that low diffusion scheme with preconditioning can recover features of low mach flow but scheme without preconditioning can't. The reason was that the modified eigenvalues of preconditioned system were proportional to the particle velocity approximately, not acoustic velocity, that agreed with real flow characters in low speed flows. However, high convergence rate and high accuracy were gained because of low diffusion and low equation stiffness. It was also noticed that the

收稿日期: 2005-05-27; 修订日期: 2005-09-02

作者简介: 李雪松(1978-), 男, 江苏金湖人, 中国科学院工程热物理研究所博士生, 主要从事叶轮机内流数值计算的研究。

distribution of equi-pressure contours for these three inlet mach numbers were almost undistinguishable for inviscid flow .

**Key words:** aerospace propulsion system; preconditioning; low diffusion; Harten-TVD; turbine; low Mach number flow

可压缩流动和不可压缩流动的计算一直是计算流体力学(CFD) 两个相对独立的研究领域, 有着各自的主要困难和解决方法。对于不可压缩流动, 由于缺少明显的计算压力的方程, 方程组也不再是进化形式, 因而难以采用较成熟的时间推进方法, 这造成了不可压缩流动的计算困难, 其发展还远不如可压缩流动成熟。目前求解不可压 N-S 方程的主要方法有: Simple 系列方法、MAC 法、投影法、拟压缩性法。对于可压缩流动, 主要的困难在于激波的捕获, 由此发展出了一大批行之有效的激波捕获格式, 如各种 TVD、ENO 格式等。

多年来, 可压缩流与不可压缩流领域内的科学家们, 都在努力将各自的方法, 延伸到对方的领域中去。这是因为: 一方面, 实际工作中可压流与不可压流问题都是会遇到的, 而工程师们总是希望用一套程序, 解决遇到的所有问题, 同时开发维护思路相当不同的两套代码, 是不容易的。另一方面, 实际流动中会出现可压不可压流动混和的情况。例如, 对于理想气体, 一般认为其马赫数低于 0.3 即可视为不可压流动, 因而当高速的空气流场中出现旋涡或其它低速区时, 就是可压不可压流动混和问题。经验表明当低速区所占区域较小时, 计算一般不受影响, 但当低速区较大时, 收敛性与精度均受很大影响。

对于可压缩流, 依据黎曼问题发展出的各种激波捕获格式, 已被广泛的应用并取得了巨大的成功。但是, 它们难以直接应用到低马赫数流动, 也就是不可压流动中去。这是因为, 激波捕获格式的数值粘性是根据系统特征值建立的, 包含声速项。这使得即使流动速度趋于 0, 声速仍将造成较大的数值耗散, 这是与物理实际不符的。

这一困难可以通过应用文献[1~4]发展的条件化预处理技术来克服, 即对格式进行改造, 从而获得低耗散的激波捕获格式。经过改造后的格式, 耗散特性与真实不可压流动相似<sup>[3]</sup>, 从而在低马赫数流动下的计算精度得以提高。下文将使用预处理技术, 改造 Harten-TVD 格式, 并应用在叶轮机内低马赫数流动中。

## 1 预处理方程及其特征值与特征矩阵

预处理技术就是在 N-S 方程组时间项上乘以预处理矩阵, 从而改变系统特征值, 进而改变格式的数值耗散。不妨采用欧拉方程, 三维任意曲线坐标系  $(\xi, \eta, \zeta)$  下, 守恒形式的预处理方程如下:

$$\Gamma^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \zeta} = 0 \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{W}$  为守恒变量,  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  和  $\mathbf{H}$  为对流量, 其具体形式可以参见一般的计算流体力学讲义。  $\Gamma$  为守恒形式下的预处理矩阵。

在以压力、熵定义的基本变量:

$$\mathbf{W} = [p \quad u \quad v \quad w \quad S]^T$$

下, 取预处理矩阵形式为对角阵<sup>[1]</sup>:

$$\Gamma_0 = \text{diag}[\theta \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

这与文献[3]所提出的预处理矩阵本质上是一致的。对于欧拉流,  $\theta$  可取:

$$\theta = \min[\max(\epsilon, Ma^2), 1] \quad (2)$$

其中:  $Ma$  为当地马赫数, 为一小量。N-S 方程下的  $\theta$  形式可见文献[1]。

考虑到程序应兼顾可压流与不可压流计算, 对于可压缩流, 使用守恒形式, 是正确计算激波所必须的, 也更有利于全局变量, 如流量的守恒。而不可压缩流虽然使用基本变量计算较为常见, 但预处理后使用守恒变量也不会引起问题。因而, 使用守恒变量求解方程, 预处理矩阵  $\Gamma_0$  也需变换到守恒变量下的形式:

$$\Gamma = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{W}} \Gamma_0 \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{Q}} \quad (3)$$

其中:  $\partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{W}$  与  $\partial \mathbf{W} / \partial \mathbf{Q}$  的具体形式可参见文献[4]。

以下得出新的系统特征值和特征矩阵。这里仅给出  $\xi$  方向的值, 其它两个方向可以通过对称性得到。

$\Gamma \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}$  的特征值为:

$$\begin{aligned} a_{1,2,3} &= U_g \quad , \quad a_4 = \tilde{U}_g - \tilde{c} \\ a_5 &= \tilde{U}_g + \tilde{c} \end{aligned} \quad (4)$$

其中:

$$U_g = \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w$$

$$\tilde{U}_g = 0.5(1 + \theta) U_g$$

$$\tilde{c} = \frac{g_{11} c^2 \theta + [0.5(1 - \theta) U_g]^2}{g_{11}}$$

$$g_{11} = \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2$$

式中:  $c$  为声速,  $\tilde{c}$  可视为伪声速。

$$R =$$

$$\begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z & 1 & 1 \\ \xi_x u & \xi_y u - \xi_z & \xi_z u + \xi_y & u' - \xi_x c' & u' + \xi_x c' \\ \xi_x v + \xi_z & \xi_y v & \xi_z v - \xi_x & v' - \xi_y c' & v' + \xi_y c' \\ \xi_x w - \xi_y & \xi_y w + \xi_x & \xi_z w & w' - \xi_z c' & w' + \xi_z c' \\ \xi_z v - \xi_y w + 0.5 V_M^2 \xi_x & \xi_x w - \xi_z u + 0.5 V_M^2 \xi_y & \xi_y u - \xi_x v + 0.5 V_M^2 \xi_z & H' - c' U_g & H' + c' U_g \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中:

$$V_M^2 = u^2 + v^2 + w^2, \quad u' = u - 0.5 \frac{\xi_x U_g}{g_{11}} \frac{\theta}{\theta}, \quad v' = v - 0.5 \frac{\xi_y U_g}{g_{11}} \frac{\theta}{\theta}$$

$$w' = w - 0.5 \frac{\xi_z U_g}{g_{11}} \frac{\theta}{\theta}, \quad c' = \frac{\tilde{c}}{g_{11} \theta}, \quad H' = \frac{c^2}{\gamma} + 0.5 V_M^2 - 0.5 \frac{U_g^2}{g_{11}} \frac{\theta}{\theta}$$

$$\theta = \theta - 1, \quad \gamma = \gamma - 1$$

式中:  $\gamma$  为绝热指数。

可以注意到, 当  $\theta = 1$  时, 特征值、特征向量都恢复到无预处理时的形式。这也就是说, 当流动超声速时, 预处理将不再起作用。预处理与正常形式在  $Ma = 1$  处光滑接合。

## 2 Harten-TVD 格式的修正

Harten-TVD 格式的数值通量可以写为如下形式:

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \mathbf{F}_{i+1/2,c} + \mathbf{F}_{i+1/2,n} \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{F}_{i+1/2,c}$  代表二阶中心差分,  $\mathbf{F}_{i+1/2,n}$  代表数值粘性。考虑预处理, 修正后  $\mathbf{F}_{i+1/2,n}$  的表示如下:

$$\mathbf{F}_{i+1/2,n} = \frac{1}{2} \Gamma_{i+1/2}^{-1} \mathbf{R}_{i+1/2} \cdot$$

$$[\mathbf{g}_{i+1} + \mathbf{g}_i - \Psi(a_{i+1/2}^{(l)} + \lambda_{i+1/2}^{(l)}) \alpha_{i+1/2}] \quad (7)$$

其中:

$$\alpha_{i+1/2} = \mathbf{R}_{i+1/2}^{-1} \Delta \mathbf{Q}_{i+1/2}$$

$\mathbf{R}$  为公式(5)所定义。 $\mathbf{g}$ ,  $a$ ,  $\lambda$  和  $\Psi$  的定义形式上与文献[6]一致, 但所涉及的特征值应改为由公式(4)定义。修正前的格式, 耗散中声速项不变, 在低速流下将造成大的耗散。而新的系统特征值, 在低速流条件下与流速基本成正比, 声速的影响随流速降低而降低, 因此改造后的格式具有低耗散的

可以看到, 在低速流条件下, 伪声速与流速同量级。当流速趋于 0 时, 所有的特征值都趋于 0。

系统的特征矩阵并不唯一。与一维、二维计算不同的是, 三维曲线坐标下不同形式的特征矩阵, 其逆矩阵未必存在, 这对计算是不利的。以下推导给出的系统相应右特征矩阵, 其逆矩阵必然存在, 而且形式上较为简单, 可以减少计算量:

$\mathbf{F}_{i+1/2,c}$  一般由下式定义:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2,c} = \frac{\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i}{2} \quad (8)$$

考虑到压力速度失耦问题, 参考 AUSM 格式的做法<sup>[7,8]</sup>, 可将其改为:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2,c} = J_{i+1/2} (\mathbf{U} \tilde{\mathbf{Q}}_{i+1/2} + \mathbf{P}_{i+1/2}) \quad (9)$$

其中:

$$U_1 = U_{g,i+1/2} -$$

$$\frac{c_2}{\rho_{0u_0}} g_{11,i+1/2} (p_{i+1} - p_i)$$

$\rho_0$  为参考密度,  $u_0$  为参考速度。

$$\tilde{\mathbf{Q}} = [\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho w \quad \rho E + p]^T$$

而

$$\mathbf{P}_{i+1/2} = [0 \quad \xi_x p \quad \xi_y p \quad \xi_z p \quad 0]^T_{i+1/2}$$

上式通过  $c_2$ , 在交界面流速中引入压力差的影响, 从而强制压力与速度耦合。下面对  $c_2$  的取值进行讨论。 $c_2$  可取为常数, 取大值有利于更有效的抑制压力与速度失耦, 但对精度有不利影响, 一般不大于 0.04。实践表明,  $c_2$  取得过小, 计算易发散, 这是因为未能抑制失耦;  $c_2$  取得过大, 计算也会发散, 这是由于误差过大的缘故。另一个经验是, 相同条件下, 对于粘性流的计算,  $c_2$  取

值需要比欧拉流大些, 这是因为粘性流场中存在更多低速区域。对于不同的问题,  $c_2$  的具体取值需通过实践确定。对于本文算例, 当  $c_2$  取  $0.005 \sim 0.03$  范围之内时, 计算可以稳定, 而且计算结果基本没有区别。

通过计算实践发现, 在不采用预处理的情况下, 使用公式(8)和(9)收敛性和计算精度基本一致。而对低速流采用预处理, 公式(8)经常导致计算发散, 尤其是在粘性流计算中。而公式(9)则可以让计算收敛。这是因为, 不采用预处理时, 即使是在低速流区域, 由于过大的数值粘性导致相当大的人工压缩性, 压力速度失耦问题并不出现。而采用预处理后, 低耗散格式的数值特性类似于真实的低速流特性, 计算失耦问题也就随之出现, 公式(8)不能抑制失耦, 压力就容易发散, 而公式(9)则可以很好的抑制失耦, 从而保证计算收敛。

### 3 叶轮机内低马赫数流动模拟

叶轮机流速通常较高, 进行 CFD 计算时, 经常采用的是各种激波捕获格式。然而, 叶轮机械内不可压缩流动问题也是不可忽略的。除了水轮机外, 以空气、燃气等理想气体为工质的叶轮机械内也存在低马赫数工况, 如低压涡轮、风力机械等。因而, 修正激波捕获格式, 改善其在低马赫数流动下的计算精度, 是很有必要的。以下将以高负荷低压涡轮叶栅 T106 无粘流动为例, 讨论预处理的作用。

考虑到低马赫数流动进出口压差较低, 计算机截断误差的影响已不可忽略<sup>[2]</sup>。本文的解决方法是, 采用双精度计算。网格数流向为 98, 纵向为 40。

图 1 给出了进口马赫数为 0.1, 0.01 和 0.001 时, 分别采用无预处理修正格式和有预处理修正格式计算时的收敛情况。可以看到, 采用未用预处理修正的“原始”的 Harten-TVD 格式, 残差收敛较慢, 尤其是下降 2 个数量级左右后, 收敛速度变的更为缓慢。而且可以注意到, 当进口流速越低, 收敛越慢。这是由于在低速流条件下, 系统矩阵为病态阵, 即声速远大于流速。而采用预处理格式, 虽然不同流速条件下收敛情况略有差别, 但都较快。这是因为此时系统特征值被修正而类似于高速流, 即伪声速与流速相差不大。由此可以认识到, 预处理可以加快低速流计算的收敛速度, 流速越低这一现象越明显。虽然对于每个迭代步, 预处理计算量要比无预处理大 20% 左右, 但与可减少

的迭代步数相比, 这是可忽略的。为了保证以下所讨论的结果都是收敛解, 每一个工况都要求其残差下降 5 个数量级。这对于无预处理格式的计算量是非常大的, 在这里借用了超级计算机深腾

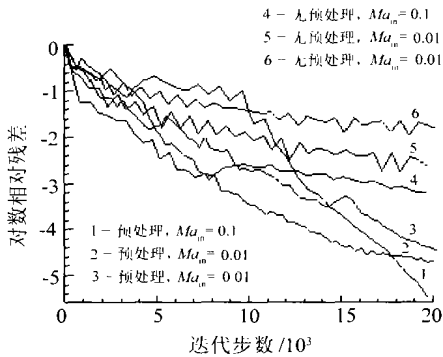


图 1 收敛史  
Fig. 1 Convergence history

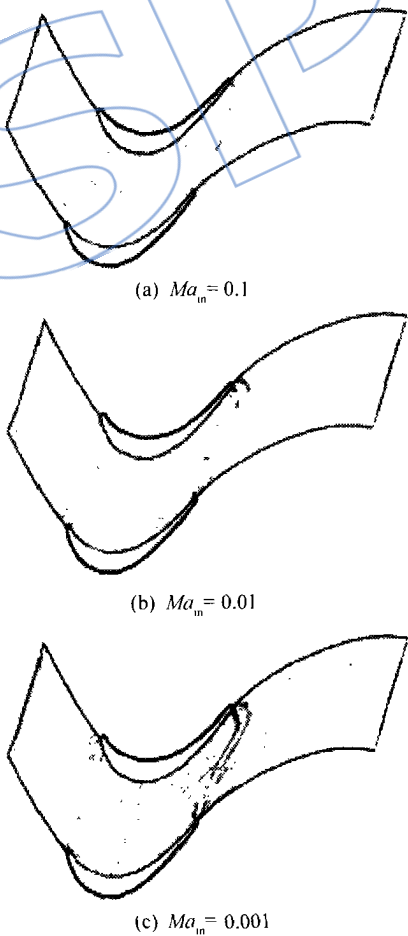


图 2 无预处理时流场等压线  
Fig. 2 Isovalues of the pressure without preconditioning

6800 的帮助。

图 2(a) 表示的工况是进口总压 14 300 Pa, 总温 293 K, 出口静压 14 000 Pa, 相应的进口马赫数  $Ma_{in}$  约为 0.1。计算格式采用未用预处理修正的 Harten-TVD 格式。可以看到, 等压线在基本形状上符合经验, 但不光滑。改变进口总压, 计算更低马赫数流动的情况。图 2(b) 工况进口总压为 14 006 Pa, 相应的进口马赫数约为 0.01。图 2(c) 工况进口总压为 14 000.1 Pa, 相应的进口马赫数约为 0.001。能够看出, 随着进口马赫数的降低, 计算结果也逐渐恶化。当  $Ma_{in} = 0.01$  时, 等压线已经非常的不光滑, 只在大概形状上还与图 2(a) 有一些相似之处。当  $Ma_{in} = 0.001$  时, 整个流场变得杂乱无章, 已经失去的计算的意义。

0.001 这样的极低速流动条件下, 计算结果也比图 2(a) 为好。同时可以注意到, 图 3(b) 与图 3(c) 压力分布非常相似, 而且与图 3(a) 基本一致。这与文献[5]观察绕机翼外流的计算现象是一致的。图 3(c) 中的等压线略有毛刺, 这是由于压差过小, 而绘图软件是单精度造成的。

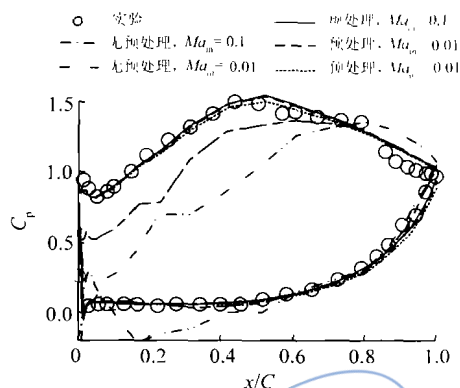


图 4 叶片表面压力分布比较

Fig. 4 Pressure distribution on the cascade

进一步比较叶片表面的压力分布, 如图 4 所示。图中实验数据取自文献[9], 横坐标  $x$  为沿叶片表面的距离,  $C$  为吸力面长度, 纵坐标  $c_p$  为压力系数,  $c_p = (p_0 - p) / (p_0 - p_2)$ , 其中  $p_0$  为进口总压,  $p_2$  为出口静压。实验中, 在吸力面  $x/C$  约为 0.8 处, 开始转捩。由于转捩预测是一个专门的问题, 这里不予考虑。当不计转捩及其造成的影响时, 可以认为, 预处理后的格式, 计算结果与实验吻合的相当好。叶片前缘处分别向压力面与吸力面, 其压力系数急剧分化。吸力面压力系数先上升, 随后在进口段产生一个小的扩压区, 这是冲动式叶栅的特点。在  $x/C$  约为 0.05 处压力系数重新开始上升, 并在  $x/C$  约为 0.5 处达到最大, 随后开始扩压, 直至出口。有意思的是, 不同进口流速, 其压力系数分布几乎重合在一起, 这与等压线图表现是一致的。原因也许是, 低速流耗散特性基本为线性。至于无预处理计算的压力分布, 对应图 2, 当  $Ma_{in} = 0.1$  时, 压力面上数据与实验基本一致, 但在吸力面上, 计算结果在数值上与实验有相当大的误差, 压力线形状上也有出入。而当  $Ma_{in} = 0.01$  时, 吸力面上的压力系数分布, 无论是数值还是形状, 误差均进一步加大, 同时压力面上的结果也出现了相当大的误差。这时的计算结果, 已没有意义了。  $Ma_{in} = 0.001$  的结果更加恶化, 由于过于杂乱, 这里不再给出。以上分析表明, 二阶激波捕获格式, 由于过大的耗散, 若不进行修正, 是不能用

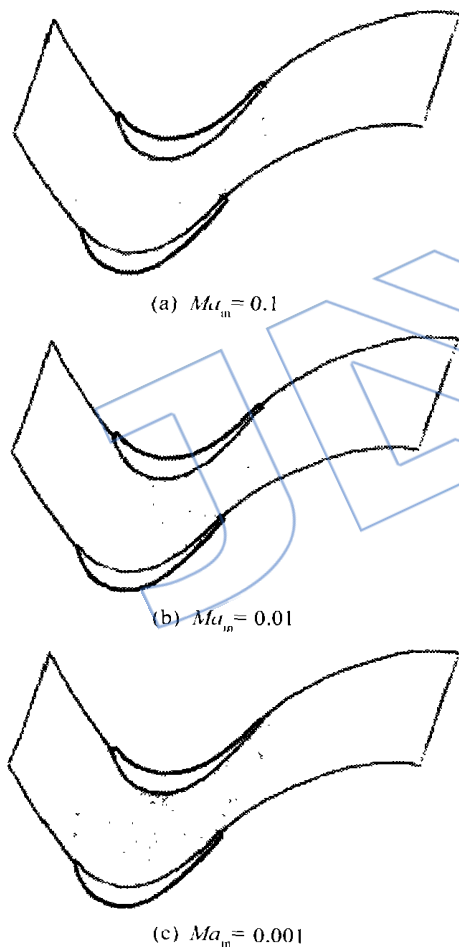


图 3 有预处理时流场等压线

Fig. 3 Isovalues of the pressure with preconditioning

图 3 的计算参数与图 2 一致, 但计算格式是预处理修正后的 Harten-TVD 格式, 即公式 (6)。可以看出, 图中等压线分布光滑正常, 即使在  $Ma_{in} =$

于低速流的计算的。

## 4 结 论

一般的激波捕获格式, 用于低速流计算, 不仅收敛速度慢, 而且不能得到正确的结果。而利用预处理技术修正格式, 则有合适的收敛速度, 并可以计算出满意的结果。本文讨论了基于守恒变量的预处理方法, 并给出了预处理修正后的低耗散 Harten-TVD 格式。这提供了一种可行的方法, 使得一套代码, 可以同时处理可压缩流和不可压缩流。通过模拟低压涡轮叶栅 T106 的流场, 表明了  
在低速与极低速流条件下, 预处理后的格式都可以工作良好。同时, 一个值得注意的现象是, 对于无粘流动, 在低速条件下, 无论进口马赫数是多少, 流场内压力分布都是相似的。

致谢 本文得到中国科学院超级计算中心的支持

## 参考文献:

[ 1] Turkel E. Preconditioning Techniques in Computational Fluid Dynamics[ J]. *Annual Reviews of Fluid Mechanics*,

1999, 31: 385~416.  
[ 2] Choi Y H, Merkle C L. The Application of Preconditioning in Viscous Flows[ J]. *Computational Physics*, 1993, 105: 207~223.  
[ 3] Weiss J M, Smith W A. Preconditioning Applied to Variable and Const Density Flows[ J]. *AIAA*, 1995, 33( 11): 2050~2057.  
[ 4] Turkel E, Radespiel R. Assessment of Preconditioning Methods for Multidimensional Aerodynamics [ J]. *Computers & Fluids*, 1997, 26( 6): 613~634.  
[ 5] Guillard H, Viozat C. On the Behaviour of Upwind Schemes in the Low Mach Number Limit[ J]. *Computers & Fluids*, 1999, 28: 63~86.  
[ 6] Yee H C, Harten A. Implicit TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws in Curvilinear Coordinates[ J]. *AIAA*, 1987, 25( 2): 266~274.  
[ 7] Edwards J R, Liou M S. Low-Diffusion Flux-Splitting Methods for Flows at All Speeds[ J]. *AIAA*, 1998, 36( 9): 1610~1617.  
[ 8] Mary I, Sagaut P. Large Eddy Simulation of Flow Around an Airfoil Near Stall[ J]. *AIAA*, 2002, 40( 6): 1139~1145.  
[ 9] Stieger R D, Hodson H P. The Transition Mechanism of Highly-Loaded LP Turbine Blades [ R]. *Proceedings of ASME Turbo Expo*, 2003, 5B: 779~788.